

第五章 函数应用

S1 方程解的存在性及方程的近似解

基础满分

1. A 【解析】由 $f(x) = \ln x - 1 = 0$, 得 $\ln x = 1 = \ln e$, 所以 $x = e$, 故 A 正确.

易错警示 不能正确理解函数零点的概念而致错

函数的零点不是一个点的坐标, 而是函数解析式对应方程的根(或函数图象与 x 轴交点的横坐标), 因此本题中应选 A 而不是选 C.

2. D 【解析】 \because 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 1, \\ 1 + \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$$

当 $x \leq 1$ 时, 令 $f(x) = 2^x - 1 = 0$, 解得 $x = 0$;

当 $x > 1$ 时, 令 $f(x) = 1 + \log_2 x = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$ (舍去).

综上, 函数的零点为 0, 故 D 正确.

3. ± 2 【解析】当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x - 4 = 0$, 解得 $x = 2$, 根据奇函数的对称性可知, $x = -2$ 也是函数 $f(x)$ 的零点, 故函数的零点为 ± 2 .

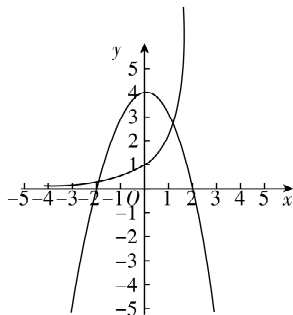
4. 3, -1 【解析】由 $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 即 $x = 0$ 或 $x = 3$ 或 $x = -1$. 由 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, 得函数定义域为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 则 $x = 0$ 不合题意, 故函数 $f(x)$ 的零点为 3, -1.

易错警示 求解函数零点时忽略定义域限制

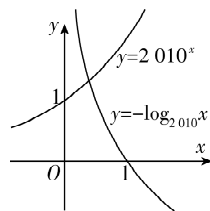
只要是求解函数问题, 定义域是解题时的第一关注点. 直接求解函数零点时, 容易只利用解方程法求解后就得出结论, 而忽略定义域的范围. 在分段函数中, 则是要注意利用的解析式对应的是哪一段自变量范围.

5. C 【解析】根据题意, 函数 $f(x) = e^x + x^2 - 4$ 在区间 $(-2, 1)$ 内零点的个数, 即函数 $y = e^x$ 与函数 $y = 4 - x^2$ 在区间 $(-2, 1)$ 内交点个数, 作图可得, 这两个函数有 2 个交点,

即函数 $f(x) = e^x + x^2 - 4$ 在区间 $(-2, 1)$ 内有 2 个零点. 故 C 正确.



6. C 【解析】当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2010^x + \log_{2010} x = 0$, 即 $2010^x = -\log_{2010} x$. 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = 2010^x$ 与 $y = -\log_{2010} x$ 的图象, 如图所示, 可知函数 $y = 2010^x$ 与 $y = -\log_{2010} x$ 有一个交点, 即当 $x > 0$ 时, $f(x) = 0$ 有一个根. 又因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = 0$ 也有一个根, 且 $f(0) = 0$. 综上所述, $f(x) = 0$ 共有 3 个解. 故 C 正确.



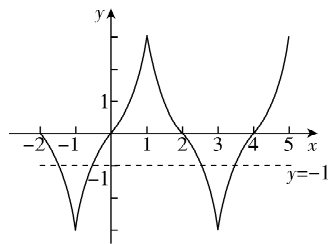
7. 4 【解析】函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(0) = 0$.

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = a^x + b$, 且 $f(1) + f(0) = f(1) = 3$, 所以

$$\begin{cases} a^0 + b = 0, \\ a^1 + b = 3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 4, \\ b = -1, \end{cases}$$

所以当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 4^x - 1$.

函数 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 由于 $f(2-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x = 1$ 对称, 由此画出函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 5]$ 的图象如图所示.



由图可知 $f(x) = -1$ 有 4 个解, 所以 $g(x) = f(x) + 1 = 0$ 有 4 个解, 即 $g(x)$ 有 4 个零点.

8. C 【解析】 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒为负, 不存在零点; 在 $(0, +\infty)$ 上, $y = \frac{3}{x}$ 和 $y = -x^2$ 均单调递减, 所以 $f(x) = \frac{3}{x} - x^2$ 也单调递减, 而 $f(1) = \frac{3}{1} - 1^2 = 2 > 0$, $f(2) = \frac{3}{2} - 2^2 = -\frac{5}{2} < 0$, 当 x 趋向于 0 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$, 而 x 趋向于 $+\infty$ 时, $f(x)$ 趋向于 $-\infty$. 综上, 零点所在的一个区间是 $(1, 2)$. 故 C 正确.

9. B 【解析】令 $h(x) = f(x) - g(x)$, $\because f(x), g(x)$ 均为 $[-1, 3]$ 上连续不断的曲线,

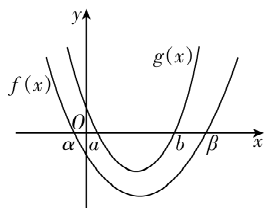
$\therefore h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上也是连续不断的曲线, 又由表格得 $h(-1) = f(-1) - g(-1) = -0.9641 + 1.324 = 0.3779 > 0$, $h(0) = f(0) - g(0) = -0.3140 + 0.3240 = 0.01 > 0$, $h(1) = f(1) - g(1) = 1.4043 - 0.6760 = 0.7283 > 0$, $h(2) = f(2) - g(2) = 6.0751 - 7.6760 = -1.6009 < 0$, $h(3) = f(3) - g(3) = 18.772 - 26.676 = -7.904 < 0$, $\therefore h(1)h(2) < 0$, \therefore 函数 $h(x)$ 有零点的区间为 $(1, 2)$, 即方程 $f(x) = g(x)$ 有实数解的区间是 $(1, 2)$. 故 B 正确.

10. C 【解析】构造函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^{\frac{1}{3}}$, 因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = -x^{\frac{1}{3}}$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 且函数 $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线. 因为 $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 0 = 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 0$, 由 $f(x)$ 的单调性可知 $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, $f(1) < 0$, 则 $f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. 故函数 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, 即方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的根所在区间是 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. 故 C 正确.

11. 2 【解析】 \because 函数 $f(x) = 2^x - 5$, $\therefore f(x)$ 是单调函数, $\therefore f(2) = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1 < 0$, $f(3) = 2^3 - 5 = 3 > 0$, $\therefore f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上有零点,

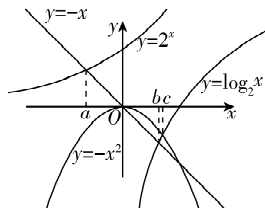
$\therefore m = 2$.

12. B 【解析】设 $f(x) = (x-a) \cdot (x-b) - 2$, $g(x) = (x-a)(x-b)$, 则 a, b 是 $g(x)$ 的两个零点. 函数 $f(x)$ 的图象可以看成 $g(x)$ 的图象向下平移 2 个单位长度得到, 且 $a < b$, $\alpha < \beta$, 如图所示, 所以 $\alpha < a < b < \beta$. 故 B 正确.



13. A 【解析】 \because 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 函数 $y = \log_2 x$, $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都单调递增, $\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log_2 x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^2$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都单调递减, 则 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上最多一个零点. 又 $f(1) = \frac{1}{2} > 0$, $f(2) = -\frac{3}{4} < 0$, 则 $1 < a < 2$, $\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} > 0$, $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$, 则 $\frac{1}{2} < b < 1$; $\therefore h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 则 $c = \frac{1}{2}$, 故 $a > b > c$. 故 A 正确.

14. D 【解析】如图, 作出函数 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = -x$, $y = -x^2$ 的图象, 由图可知 $a < b < c$, $y = 2^x$ 和 $y = \log_2 x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, $a = -b$, 故 A, B, C 错误; $2^a + a = 0$, $\log_2 b + b = 0$, $c^2 + \log_2 c = 0$, 且有 $2^a = -a = b$, $c^2 = -\log_2 c < -\log_2 b = b$, 故 D 正确.



15. C 【解析】根据二分法的思想, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象连续不断, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 即函数的零点是变号零点, 才能将区间 (a, b) 一分为二, 逐步得到零点的近似值, 对各选项的函数图象分析可知, A, B, D 都符合条件, 而 C 不符合, 因为图象经过零点时函数值的符号没有发生变化, 因此不能用二分法求函数零点, 故 C 正确.

易错警示 忽略二分法的应用条件而致错

在使用函数零点存在定理时, 一定要注意它的使用条件, 满足它的条件时, 能够判断函数存在零点, 但是不满足条件时, 函数也可能存在零点, 另外还需注意函数的定义域以及所给的区间.

16. A 【解析】 $f(x) = x^2 + 6x + c$ 有零点, 但不能用二分法求出, 则 $x^2 + 6x + c = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $\Delta = 36 - 4c = 0$, 解得 $c = 9$. 故 A 正确.

17. D 【解析】显然 $f(x) = \ln x + x$ 在定义域上单调递增, 且 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} < 0$, $f(1) = 1 > 0$, 可以使用二分法, 故 A 错误; $f(x) = e^x - 3x$ 的图象在定义域上连续, 且 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 3 < 0$, $f(2) = e^2 - 6 > 0$, 可以使用二分法, 故 B 错误; $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 的图象在定义域上连续, 且 $f(-2) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $f(3) = 19 > 0$, 可以使用二分法, 故

C 错误; $4x^2 - 4\sqrt{5}x + 5 = (2x - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 即 $f(x) = 4x^2 - 4\sqrt{5}x + 5$ 只有一个不变号零点, 故不可以使用二分法, 故 D 正确.

18. C 【解析】显然 $f(x) = x \ln x + 2x - 6$ 的图象在 $x \in [2, 3]$ 上是连续不断的曲线, 由于 $f(2) < 0$, $f(2.25) > 0$, 所以 $f(2)f(2.25) < 0$. 由零点存在性定理可得 $f(x) = x \ln x + 2x - 6$ 的零点所在区间为 $(2, 2.25)$, 所以方程 $x \ln x + 2x - 6 = 0$ 在区间 $(2, 2.25)$ 内一定有根. 故 C 正确.

19. B 【解析】因为开区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 的长度等于 $\frac{1}{2}$, 每经过一次操作, 区间长度变为原来的一半, 所以经过 $n (n \in \mathbf{N}_+)$ 次操作后, 区间长度变为 $\frac{1}{2^{n+1}}$. 令 $\frac{1}{2^{n+1}} < 0.01$, 解得 $n \geq 6$, 且 $n \in \mathbf{N}_+$, 故所需二分区间的次数最少为 6. 故 B 正确.

20. C 【解析】 $\because f(1) < 0, f(2) > 0$, $f(1.5) > 0$, \therefore 在区间 $(1, 1.5)$ 内函数 $f(x) = 3^x + 3x - 8$ 存在一个零点, \therefore 在第二次应计算的函数值所对应的 x 值为 $\frac{1+1.5}{2} = 1.25$. 故 C 正确.

21. D 【解析】由题中表格可知, 求方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 的近似根时依次选择的区间为 $(1, 1.5)$, $(1.25, 1.5)$, $(1.375, 1.5)$, $(1.375, 1.4375)$, $(1.40625, 1.4375)$, 又因为 $1.4375 - 1.40625 = 0.03125 < 0.04$, 故方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 的一个近似根为 1.4375. 故 D 正确.

22. AC 【解析】 $\because f(1.375) =$

$-0.26 < 0, f(1.4375) = 0.02 > 0$, \therefore 零点在 $(1.375, 1.4375)$ 内, 且 $1.4375 - 1.375 = 0.0625 < 0.1$, 故 A, C 正确, D 错误; $f(1.40625) = -0.13 < 0, f(1.4375) = 0.02 > 0$, $|1.40625 - 1.4375| = 0.03125 > 0.01$ 故 B 错误.

23. 【解】(1) $y = f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. 证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 不妨设 $1 < x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2},$$

因为 $1 < x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 - 1 > 0, x_1 x_2 > 0$,

可得 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$,

所以 $y = f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 因为函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是连续且单调的, 可知其在区间 $(1, +\infty)$ 上的零点即为方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的解,

且 $f(2) < 0, f(3) > 0$, 可得 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有且仅有一个零点 $x_0 \in (2, 3)$,

在区间 $(1, +\infty)$ 上利用二分法表如下:

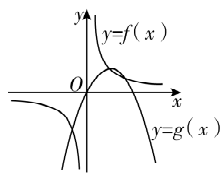
区间	中点 x_0	中点函数值 $f(x_0)$	区间长度
$(2, 3)$	$\frac{5}{2} = 2.5$	$f(\frac{5}{2}) < 0$	1
$(\frac{5}{2}, 3)$	$\frac{11}{4} = 2.75$	$f(\frac{11}{4}) > 0$	$\frac{1}{2}$
$(\frac{5}{2}, \frac{11}{4})$	$\frac{21}{8} = 2.625$	$f(\frac{21}{8}) > 0$	$\frac{1}{4}$
$(\frac{5}{2}, \frac{21}{8})$	$\frac{41}{16} = 2.5625$	$f(\frac{41}{16}) < 0$	$\frac{1}{8}$

此时解在区间 $(\frac{41}{16}, \frac{21}{8})$, 此区间

长度为 $\frac{1}{16}, \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$, 满足精确度为 0.1, 即 $(2.5625, 2.625)$ 内任意一个实数都是对应方程符合精确度要求的一个近似解, 比如 2.6 是方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上的一个近似解.

7.4 重难点上分

1. C 【解析】如图, 在同一个坐标系中作出函数 $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = ax^2 + bx (a, b \in \mathbf{R}, a < 0)$ 的大致图象,



由题意得 $\frac{1}{x} = ax^2 + bx$ 的三个解满足 $x_1 < 0 < x_2 < x_3, y_1 < 0 < y_3 < y_2$, 故 B, D 错误;

方程可化为 $\frac{1}{x^2} = ax + b$, 则有

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1^2} = ax_1 + b, \\ \frac{1}{x_2^2} = ax_2 + b, \end{cases} \quad \text{且由 } a < 0, \text{ 得 } ax_1 + b > ax_2 + b,$$

所以 $\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}$, 即 $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) < 0$, 所以 $x_1 + x_2 > 0$,

$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} < 0$, 故 A 错误, C 正确.

2. ACD 【解析】函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $f(0) = -1, f(1) = 1$, 因此 $0 < a < 1$. 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(1) = -1, g(2) = 1$, 因此 $1 < b < 2$. 函数 $h(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $h(1) = 0$, 因此 $c = 1, b > c > a$, 故 A, D 正确.

由 $f(x) = 2^x + x - 2 = 0$ 得 $2^x = -x + 2$, 由 $g(x) = \log_2 x + x - 2 = 0$ 得 $\log_2 x = -x + 2$, 由 $\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ 而

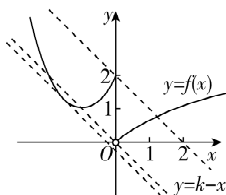
函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 直线 $y=x$ 与 $y=-x+2$ 相互垂直, 则直线 $y=-x+2$ 与函数 $y=2^x, y=\log_2 x$ 的图象交点 $(a, 2^a), (b, \log_2 b)$ 关于直线 $y=x$ 对称, 所以 $a+b=2 \times 1=2$, 故 C 正确, B 错误.

3. -2 【解析】依题意, $4^{x_0} + \log_2 \sqrt{x_0} + x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$, 则 $4^{x_0} + \log_4 x_0 + x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$, 故 $4^{x_0} + x_0 = \frac{1}{x_0} + \log_4 \frac{1}{x_0} = 4^{\log_4 \frac{1}{x_0}} + \log_4 \frac{1}{x_0}$ ①.

令 $g(x) = 4^x + x$, 因为 $y=4^x$ 与 $y=x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以函数 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则①式等价于 $g(x_0) = g\left(\log_4 \frac{1}{x_0}\right) \Leftrightarrow x_0 = \log_4 \frac{1}{x_0}$, 故 $4^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, $\log_4 x_0 = -x_0$, 则 $\log_2 x_0 = -2x_0$, 故 $4^{x_0} \cdot \log_2 x_0 = -2$.

4. B 【解析】 $\because y=2^x$ 和 $y=-\frac{3}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $\therefore f(x) = 2^x - \frac{3}{x} + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, \therefore 只需 $f(1) \cdot f(2) < 0$ 即可, 即 $(-1+a) \cdot \left(\frac{5}{2}+a\right) < 0$, 解得 $-\frac{5}{2} < a < 1$, 故 B 正确.

5. D 【解析】如图, 作出函数 $f(x)$ 的大致图象(实线),



平移直线 $y=k-x$, 由 $k-x=x^2+2x+2$ 可得, $x^2+3x+2-k=0$,

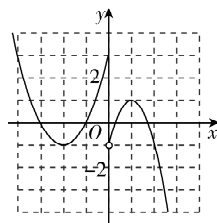
$\Delta=9-8+4k=0, k=-\frac{1}{4}$, 故当 $k=-\frac{1}{4}$ 时, 直线 $y=-\frac{1}{4}-x$ 与曲线 $y=x^2+2x+2$ 相切;

当 $k=0$ 时, 直线 $y=-x$ 经过点 $(0, 0)$, 且与曲线 $y=x^2+2x+2$ 有 2 个不同的交点;

当 $k=2$ 时, 直线 $y=2-x$ 经过点 $(0, 2)$, 且与 $f(x)$ 的图象有 3 个不同的交点.

由图分析可知, 当 $k \in (0, 2]$ 时, $f(x)$ 的图象与直线 $y=k-x$ 有 3 个不同的交点, 故 D 正确.

6. A 【解析】因为 $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $x \leq 0$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递减, 在 $(-2, 0]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上有最小值为 $f(-2) = -1$, 且 $f(0) = 3$. 因为 $f(x) = -2x^2 + 4x - 1, x > 0$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值为 $f(1) = 1$, 作出 $f(x)$ 的图象如图所示, 所以关于 x 的方程 $f(x) - a = 0$ 有两个不同实根的 a 的取值范围为 $(1, 3] \cup \{-1\}$. 故 A 正确.



7. C 【解析】当 $x < 1$ 时, $f(x) = 2^x - m$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上至多有一个零点; 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 4mx + 3m^2 = (x-m)(x-3m)$ 至多有两个零点. 因为 $f(x)$ 有三个零点, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有一个零点, 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点. 当 $x < 1$ 时, 令 $f(x) = 2^x - m = 0$, 可得 $m = 2^x \in (0, 2)$; 当 $x \geq 1$ 时, 由 $f(x) = (x-m)(x-3m) = 0$, 可得 $x = m$ 或 $x = 3m$, 所以 $\begin{cases} m \geq 1, \\ 3m \geq 1, \\ m \neq 3m, \end{cases}$ 解得 $m \geq 1$. 综上所述, 实数 m 的取值范围

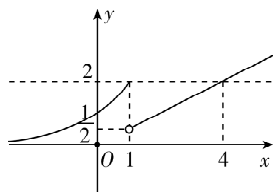
为 $[1, 2)$. 故 C 正确.

8. $\left[-2, -\frac{1}{2}\right)$ 【解析】当 $x \leq 1$ 时, $y = a + 2^x \in (a, 2+a]$; 当 $x > 1$ 时, $y = \frac{1}{2}x + a \in \left(\frac{1}{2} + a, +\infty\right)$, 且 $f(x)$ 在两段区间上分别单调递增. 由 $f(x)$ 恰有两个零点, 可知 $f(x)$ 在 $x \leq 1$ 和 $x > 1$ 各有一个零点, 可得 $\begin{cases} 2+a \geq 0, \\ a < 0, \\ \frac{1}{2}+a < 0, \end{cases}$ 解得 $a \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right)$.

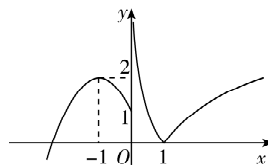
【一题多解】 设 $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x, & x > 1, \end{cases}$ 则

$f(x) = g(x) + a$. 令 $f(x) = 0$, 得 $g(x) = -a$. 作出 $g(x)$ 的图象如图, 函数 $f(x)$ 恰有两个零点, 即 $g(x)$ 的图象与直线 $y = -a$ 有两个交点.

由图可知 $\frac{1}{2} < -a \leq 2$, 解得 $a \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right)$.



9. 1 【解析】画出 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 1, & x \leq 0, \\ |\log_{0.5} x|, & x > 0 \end{cases}$ 的图象如图所示.



因为方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 所以 $f(x)$ 的图象与 $y=a$ 有四个不同的交点.

由图可知, $f(0) = 1, f(-1) = 2$, 故 a 的取值范围是 $[1, 2)$, 故 a 的最小值是 1.

10. 【解】(1) 当 $a = -2$ 时, $f(x) = 9^x - 3^{x+1} + 2 = (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2$, 令 $(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$, 解得 $3^x = 1$ 或 $3^x = 2$, 即 $x = 0$ 或 $x = \log_3 2$, 所以函数 $f(x)$ 的零点是 0 和 $\log_3 2$.

(2) 令 $t = 3^x > 0$, 因为 $t = 3^x$ 单调递增, 所以要使函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 只需 $t^2 - 3t - a = 0$ 有两个不相等的正根.

记 $t^2 - 3t - a = 0$ 的两根为 t_1, t_2 , 则

$$\begin{cases} \Delta = (-3)^2 + 4a > 0, \\ t_1 + t_2 = 3 > 0, \\ t_1 t_2 = -a > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } -\frac{9}{4} < a < 0,$$

即实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$.

易错警示 不能正确将函数零点等价转化而致错

求解与指数函数有关的方程的根的问题, 常利用换元法转化为熟悉的方程 (如一元一次方程、一元二次方程等) 的根, 使用换元法时要注意换元后的等价性, 如本题中通过换元后转化的一元二次方程要在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的根.

§1 考点训练

1. B 【解析】 $\because y_1 = x^2 + ax + b$ 的两个零点为 2, 3, $\therefore 2+3 = -a, 2 \times 3 = b$, $\therefore a = -5, b = 6, \therefore y_2 = bx^2 + ax - 1 = 6x^2 - 5x - 1$. 令 $6x^2 - 5x - 1 = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $-\frac{1}{6}$, 故 B 正确.

2. A 【解析】 $\because \lg a, \lg b$ 是方程 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 两个根, $\therefore \lg a + \lg b = 2$, $(\lg a) \cdot (\lg b) = \frac{1}{2}$,

$$\text{则 } \left(\lg \frac{a}{b}\right)^2 = (\lg a - \lg b)^2 =$$

$$(\lg a + \lg b)^2 - 4(\lg a) \cdot (\lg b) = 4 - 4 \times \frac{1}{2} = 2, \text{ 故 A 正确.}$$

3. C 【解析】 区间 $(1, 2)$ 的长度为 1, 每次二等分都使长度变为原来的 $\frac{1}{2}$, 3 次取中间值后, 区间 $(1, 2)$ 的长度变为 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} > 0.1$, 不满足题意;

4 次取中间值后, 区间 $(1, 2)$ 的长度变为 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < 0.1$, 满足题意. 故 C 正确.

4. D 【解析】 由 $y = f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数并结合题表可知, $f(0) < f(1) < 0$, 故 A 正确;

由题表可知, 当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 B 正确;

由 $f(1) < 0, f(2) > 0$, 可知函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点, 故 C 正确; \therefore 连续函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, \therefore 直线 $y = -x$ 与 $y = f(x)$ 至少有一个交点, 即函数 $g(x) = f(x) + x$ 至少有一个零点, 故 D 错误.

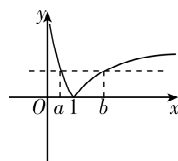
5. C 【解析】 由 $g(x) = 0$ 可得 $f(1-x) = 1$. 当 $x \leq 0$ 时, $x^2 + 2x = 1 \Rightarrow x = -1 - \sqrt{2}$ 或 $x = -1 + \sqrt{2}$ (舍去); 当 $x > 0$ 时, $|\lg x| = 1 \Rightarrow x = 10$ 或 $x = \frac{1}{10}$. 由 $1-x = -1 - \sqrt{2}$ 或 $1-x = 10$ 或 $1-x = \frac{1}{10}$, 解得 $g(x)$ 的零点为 $x = 2 + \sqrt{2}$ 或 -9 或 $\frac{9}{10}$.

综上所述, $g(x)$ 共有 3 个零点, 故 C 正确.

6. B 【解析】 函数 $f(x) = x + \log_2 x - m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 上存在零点, $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - m < 0, f(4) = 6 - m >$

0, 解得 $-\frac{1}{2} < m < 6$, 故“函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 上存在零点”是“ $m \in (1, 6)$ ”的必要不充分条件, 故 B 正确.

7. C 【解析】 $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 画出图象.



$\because 0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b), \therefore 0 < a < 1 < b, -\ln a = \ln b$,

$\therefore \ln(ab) = 0$, 则 $ab = 1$.

$\therefore 2a + b \geq 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $ab = 1, 2a = b > 0$, 即 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}$

时取等号.

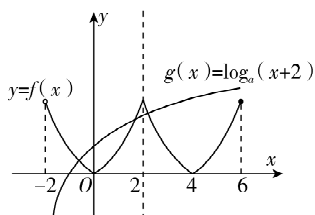
$\therefore 2a + b$ 的取值范围是 $[2\sqrt{2}, +\infty)$, 故 C 正确.

8. D 【解析】 \because 方程 $f(x) - \log_a(x+2) = 0 (a > 1)$ 在 $(-2, 6]$ 至少有 2 个不同的实数根, 至多有 3 个不同的实数根, \therefore 可看成函数 $y = f(x)$ 与 $g(x) = \log_a(x+2)$ 的图象在区间 $(-2, 6]$ 内至少有 2 个交点, 至多有 3 个交点,

$\therefore f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$,

\therefore 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$,

\therefore 对 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2-x) = f(2+x), \therefore f(x)$ 的对称轴为直线 $x = 2$, 可画出 $y = f(x)$ 与 $g(x) = \log_a(x+2)$ 在 $(-2, 6]$ 的图象, 如图所示,

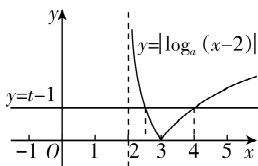


结合图象可得 $\begin{cases} f(2) \geq g(2), \\ f(6) < g(6), \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} 3 \geq \log_a 4, \\ 3 < \log_a 8, \end{cases} \text{解得 } \sqrt[3]{4} \leq a < 2, \text{即 } a \text{ 的}$$

取值范围是 $[\sqrt[3]{4}, 2)$, 故 D 正确.

- 9. D** 【解析】令 $f(x) = |\log_a(x-2)| - t + 1 = 0$, 即 $|\log_a(x-2)| = t - 1$, 则由函数 $f(x) = |\log_a(x-2)| - t + 1 (a > 0, a \neq 1, t \in \mathbf{R})$ 有 2 个零点 $m, n (m > n)$, 可知 $|\log_a(x-2)| = t - 1$ 有 2 个根, 即函数 $y = |\log_a(x-2)|$ 与 $y = t - 1$ 的图象有 2 个交点, 作出函数 $y = |\log_a(x-2)|$ 的图象如图. 可知要使函数 $y = |\log_a(x-2)|$ 与 $y = t - 1$ 的图象有 2 个交点, 需满足 $t - 1 > 0$, 即 $t \in (1, +\infty)$, 故 A 错误;



由 A 的分析可知函数 $y = |\log_a(x-2)|$ 与 $y = t - 1$ 的图象有 2 个交点, 交点的横坐标即为 m, n , 由于 $m > n$, 结合图象可知 $m > 3, 2 < n < 3$, 故 B 错误;

由题意可知 $|\log_a(m-2)| = t - 1, |\log_a(n-2)| = t - 1$, 故 $|\log_a(m-2)| = |\log_a(n-2)|$, 而 $m > 3, 2 < n < 3, a$ 的取值不确定, 但是 $\log_a(m-2), \log_a(n-2)$ 的值必一正一负, 故 $\log_a(m-2) = -\log_a(n-2) = \log_a \frac{1}{n-2}$, 即 $(m-2) \cdot (n-2) = 1$, 故 $mn - 2(m+n) = -3$, 故 C 错误, D 正确.

- 10. ACD** 【解析】 $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, 且 $f(1) = 0$, 当 $x < 1$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0, f(x)$ 在零点两侧的函数值同号, 不能

用二分法求函数零点, 故 B 错误;

对于 $f(x) = 3x - 1, f(x) = \log_4 x, f(x) = e^x - 2$ 都是单调且存在零点的, 因此在函数零点两侧的函数值异号, 故可以用二分法求函数零点, 故 A, C, D 正确.

- 11. D** 【解析】设方程 $f(x) = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 则 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 根据根与系数的关系可得 $b = -(x_1 + x_2), c = x_1 x_2$, 此时 $\Delta = b^2 - 4c = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 有两个实根, 因此 $f(0) \cdot f(1) = c(1+b+c) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2) = x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \leq \left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$,

当且仅当 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ 时取等号. 又

因为 $f(x) = x^2 + bx + c$ 在 $(0, 1)$ 上有两个零点, 所以 $f(0)f(1) > 0$,

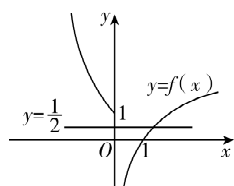
即 $f(0)f(1) \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$, 所以

$f(0)f(1)$ 的值可能为 $\frac{1}{32}$, 故 A, B,

C 错误, D 正确.

- 12. AD** 【解析】令 $g(x) = 0$, 得 $f(f(x)) = -1$, 则函数 $y = f(f(x)) + 1$ 的零点个数即为 $f(f(x)) = -1$ 解的个数, 设 $f(x) = t$, 则 $f(t) = -1$, 二次函数 $y = x^2 - kx + 1$, 其图象开口向上, 过点 $(0, 1)$, 对称轴为 $x = \frac{k}{2}$,

当 $k > 1$ 时, $y = x^2 - kx + 1$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $y \geq 1$, 如图:



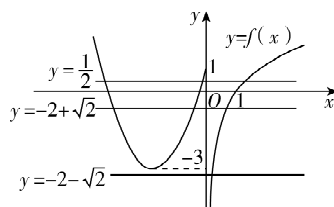
由 $f(t) = -1$, 得 $\log_2 t = -1$, 解得 $t = \frac{1}{2}$, 由 $f(x) = t$, 得 $\log_2 x = \frac{1}{2}$, 解得 $x = \sqrt{2}$,

因此函数 $g(x) = f(f(x)) + 1$ 的零点个数是 1, 故 A 正确, B 错误.

当 $k = -4$ 时, $f(x) =$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 1, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & x > 0, \end{cases} \text{作出函数 } f(x) \text{ 的}$$

图象如图.



由图象知 $f(t) = -1$ 有 3 个根, 当 $t > 0$ 时, $\log_2 t = -1$, 解得 $t = \frac{1}{2}$;

当 $t \leq 0$ 时, $t^2 + 4t + 1 = -1$, 解得 $t = -2 \pm \sqrt{2}$.

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}$, 若 $\log_2 x =$

$\frac{1}{2}$, 则 $x = \sqrt{2}$, 若 $x^2 + 4x + 1 = \frac{1}{2}$, 则

$x = -2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$, 此时共有 3 个解;

当 $t = -2 + \sqrt{2}$ 时, $f(x) = -2 + \sqrt{2}$, 此时 $\log_2 x = -2 + \sqrt{2}$ 有 1 个解,

$x^2 + 4x + 1 = -2 + \sqrt{2}$, 即 $(x+2)^2 = 1 + \sqrt{2}$ 有 2 个解,

当 $t = -2 - \sqrt{2}$ 时, $f(x) = -2 - \sqrt{2}$, 此时 $\log_2 x = -2 - \sqrt{2}$ 有 1 个解,

$x^2 + 4x + 1 = -2 - \sqrt{2}$, 即 $(x+2)^2 = 1 - \sqrt{2} < 0$ 无解,

因此当 $k = -4$ 时, 函数 $g(x) = f(f(x)) + 1$ 的零点个数是 7, 故 D 正确, C 错误.

- 13. $(-7, -4\sqrt{3})$** 【解析】易知 $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 3$, 令 $f(x) = t$,

则需关于 t 的方程 $t^2 + mt + 12 = 0$ 在 $(3, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根,

$$\begin{cases} 3^2 + 3m + 12 > 0, \\ -\frac{m}{2} > 3, \\ \Delta = m^2 - 48 > 0, \end{cases}$$

解得 $-7 < m < -4\sqrt{3}$.

14. $\{-1, -\frac{5}{3}\}$ 【解析】若 $k^2 - 1 = 0$,

即 $k = \pm 1$.

①当 $k = 1$ 时, $f(x) = 1$, 此时没有零点;

②当 $k = -1$ 时, $f(x) = -2x + 1$, 令 $f(x) = -2x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 符合题意.

若 $k^2 - 1 \neq 0$, 即 $k \neq \pm 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点, 则 $f(x) = (k^2 - 1)x^2 + (k - 1)x + 1 = 0$ 有两个相等的实根,

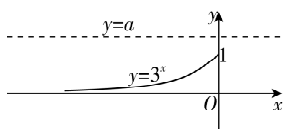
所以 $\Delta = (k - 1)^2 - 4 \cdot (k^2 - 1) = 0$,

解得 $k = -\frac{5}{3}$ 或 $k = 1$ (舍去).

综上, 实数 k 的取值集合为 $\{-1, -\frac{5}{3}\}$.

15. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ 【解析】当

$x > 0$ 时, 令 $f(x) = \ln x = 0$ 可得 $x = 1$. 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -3^x + a$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减, 因为函数 $f(x)$ 有且只有一个零点, 所以函数 $f(x) = a - 3^x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上无零点, 由 $f(x) = a - 3^x \neq 0$ 可得 $a \neq 3^x$, 所以直线 $y = a$ 与函数 $y = 3^x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的图象无交点, 如图所示:



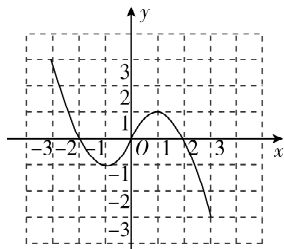
当 $x \leq 0$ 时, $0 < 3^x \leq 1$, 则当 $a \leq 0$

或 $a > 1$ 时, 直线 $y = a$ 与函数 $y = 3^x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的图象无交点. 因此, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

16. 0 【解析】令 $f(x) - 2^x = t$, 由函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的单调函数, 且 $\forall x \in \mathbf{R}, f(f(x) - 2^x) = -\frac{1}{2}$, 得 t 为常数, 则 $f(x) = 2^x + t$, 且 $f(t) = -\frac{1}{2}$, 于是有 $2^t + t = -\frac{1}{2}$. 又

因为函数 $g(t) = 2^t + t$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 且 $g(-1) = -\frac{1}{2}$, 因此 $t = -1$, 即 $f(x) = 2^x - 1$. 由 $f(x) = 0$, 得 $x = 0$, 所以函数 $f(x)$ 的零点是 0.

17. 【解】(1) 因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 其图象关于原点对称, 则补充图象如图,



结合图象可知, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.

(2) 因为当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$, 所以当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 2x$.

又因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x) = -x^2 + 2x$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = -x^2 + 2x$,

故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0, \\ x^2 + 2x, & x \leq 0. \end{cases}$

(3) 实数 t 的取值范围为 $(-1, 1)$. 因为 $f(x) = t$ 有 3 个不相等的实数根, 等价于 $f(x)$ 与 $y = t$ 的图象有 3 个交点,

结合(1)中 $f(x)$ 的图象可知, 当 $t \in (-1, 1)$ 时, $f(x)$ 与 $y = t$ 的图象有 3 个交点, 所以 $t \in (-1, 1)$.

18. 【解】(1) 当 $c = 0$ 时, 令 $f(x) = |1 - \lg x| = 0$, 解得 $x = 10$, 所以函数 $f(x)$ 的零点为 10.

(2) 结合已知条件得, $c > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \lg x - c, & 0 < x \leq 10, \\ \lg x - c - 1, & x > 10, \end{cases}$$

当 $c > 0$ 时, $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),

则 $1 - \lg x_1 = \lg x_2 - 1 = c$, 所以 $x_1 = 10^{1-c}, x_2 = 10^{1+c}$,

所以 $4x_1 + x_2 = 4 \times 10^{1-c} + 10^{1+c} = \frac{40}{10^c} +$

$10 \times 10^c \geq 2 \sqrt{\frac{40}{10^c} \times 10 \times 10^c} = 40$ (当

且仅当 $\frac{40}{10^c} = 10 \times 10^c$, 即 $c = \lg 2$ 时

取等号),

所以 $4x_1 + x_2 \in [40, +\infty)$.

19. 【解】(1) 依题意 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$$1 - \frac{1}{2} = \log_a \frac{1}{3} = -\log_a 3 = -1,$$

$a = 3$,

所以 $f(x) = \log_3 \frac{1-x}{1+x}$, 由 $\frac{1-x}{1+x} > 0$ 得

$(1-x)(1+x) > 0$, 解得 $-1 < x < 1$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$.

(2) 由题得 $g(x) = f(x) - \log_3 [3(1-x)] = \log_3 \frac{1-x}{1+x} - \log_3 [3(1-x)]$,

则 $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 1-x > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x < 1$, 所以

$g(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$.

令 $g(x) = 0$ 得 $\log_3 \frac{1-x}{1+x} =$

$\log_3 [3(1-x)]$,

所以 $\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} = 3(1-x), \\ -1 < x < 1, \end{cases}$ 解得 $x = -\frac{2}{3}$, 即函数 $g(x) = f(x) - \log_3(3-3x)$ 的零点为 $-\frac{2}{3}$.

§2 实际问题中的函数模型

基础满分

1. C 【解析】由题意可设比例系数

为 k , $\therefore y = k \left[\frac{5^x}{x^2} \right] (k \neq 0)$, $\therefore 10 =$

$k \left[\frac{5^1}{1^2} \right]$, $\therefore k = 2$,

当 $x = 4$ 时, $y = 2 \times \left[\frac{5^4}{4^2} \right] = 2 \times$

$\left[39 + \frac{1}{16} \right] = 2 \times 39 = 78$. 故 C 正确.

2. C 【解析】设这批台灯的销售单

价为 x 元, 销售收入为 y 元, 则 $y = x[30 - 2(x - 15)]$, $x \geq 15$. 由题意得 $x[30 - 2(x - 15)] > 400$, 即 $x^2 - 30x + 200 < 0$, 解得 $10 < x < 20$. 又因为 $x \geq 15$, 所以 $15 \leq x < 20$, 因此, 这批台灯的销售单价 x 的取值范围是 $\{x | 15 \leq x < 20\}$. 故 C 正确.

3. 90 10 【解析】(1) 顾客一次购

买草莓和西瓜各 1 盒, 由草莓 40 元/盒, 西瓜 60 元/盒, 得总价为 $40 + 60 = 100$ (元). 因为一次购买水果的总价达到 80 元, 顾客就少付 10 元, 所以要支付 $100 - 10 = 90$ (元).

(2) 设订单总价为 M 元, 若 $0 < M < 80$, 没有优惠, 符合题意; 若 $M \geq 80$, 则有 $0.8(M - x) \geq 0.7M$, $x \leq \frac{M}{8}$, 因为 $\frac{M}{8} \geq \frac{80}{8} = 10$, 所以 $x \leq 10$, 因此, x 的最大值为 10.

4. A 【解析】由题意得 $C = 56 \times 10^n =$

$15^n t$, 则 $t = 56 \times \frac{10^n}{15^n} = 56 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$, 由

$n = \log_{\frac{3}{2}} 2$, 得 $t = 56 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n =$

$\frac{56}{\left(\frac{3}{2} \right)^{\log_{\frac{3}{2}} 2}} = \frac{56}{2} = 28$, 所以放电时间

为 28 h. 故 A 正确.

5. B 【解析】根据题意, $T - T_a = (T_0 -$

$T_a) e^{-\frac{t}{h}}$, 因为刚泡好的绿茶水温度是 80°C 放在 20°C 的室温中, 10 min 以后茶水的温度是 50°C ,

则有 $50 - 20 = (80 - 20) e^{-\frac{10}{h}}$, $e^{-\frac{10}{h}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{10}{h} = \ln 2 \approx 0.7$, 故 $h \approx \frac{100}{7}$,

因为某种绿茶用 80°C 的水泡制, 再等到茶水温度降至 60°C 时饮用, 可以产生最佳口感,

所以 $60 - 20 = (80 - 20) e^{-\frac{t}{\frac{100}{7}}}$, $\frac{2}{3} =$

$e^{-\frac{t}{\frac{100}{7}}}$, 所以 $\frac{t}{\frac{100}{7}} = \ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2 \approx$

0.4 , 故 $t \approx \frac{100}{7} \times 0.4 \approx 5.7$, 故 B

正确.

6. D 【解析】假设经过 $x (x \in \mathbf{N}_+)$ 小

时后, 驾驶员开车才不构成酒驾, 则 $1 \times (1 - 10\%)^x < 0.2$, 即 $0.9^x < 0.2$, 所以 $\lg 0.9^x < \lg 0.2$,

则 $x > \frac{\lg 0.2}{\lg 0.9} = \frac{\lg \frac{1}{5}}{\lg \frac{9}{10}} = \frac{-\lg 5}{2\lg 3 - 1} =$

$\frac{1 - \lg 2}{1 - 2\lg 3} \approx 15.2$, 所以 $x_{\min} = 16$, 所

以次日上午最早 10 点, 该驾驶员开车才不构成酒驾. 故 D 正确.

7. ACD 【解析】若不改变信噪比

$\frac{S}{N}$, 而将信道带宽 W 增加一倍, 即

$2W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 2C$, 所以 C 增加

一倍, 故 A 正确;

若不改变信道带宽 W 和信道内信号的平均功率 S , 而将高斯噪声功

率 N 降低为原来的一半, 即

$W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = W \log_2 \left(1 + \frac{2S}{N} \right) \neq$

$W \log_2 \left[1 + \frac{2S}{N} + \left(\frac{S}{N} \right)^2 \right] =$

$2W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$, 故 B 错误;

若不改变带宽 W , 而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 255 提升至 1 023, 则

$\frac{W \log_2 (1 + 1023)}{W \log_2 (1 + 255)} - 1 = \frac{\log_2 2^{10}}{\log_2 2^8} - 1 =$

$\frac{10}{8} - 1 = \frac{1}{4}$, 所以 C 增加了 25%, 故

C 正确;

若不改变带宽 W , 而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 999 提升至 4 999, 则

$\frac{W \log_2 (1 + 4999)}{W \log_2 (1 + 999)} - 1 = \frac{\log_2 5000}{\log_2 1000} - 1 =$

$1 = \frac{\lg 5000}{\lg 1000} - 1 = \frac{\lg 5 + \lg 1000}{3} - 1 =$

$\frac{\lg 5}{3} \approx 0.233$, 故 D 正确.

8. 【解】(1) 由题意知, 当年生产 x (万件) 时, 年生产成本为 $32x +$

$3 = 32 \left(3 - \frac{2}{t+1} \right) + 3$,

当年生产的商品正好销完时, 销量也为 x (万件), 则年销售收入为

$\frac{3}{2} \left[32 \left(3 - \frac{2}{t+1} \right) + 3 \right] + \frac{1}{2} t$,

由题意, $y = \frac{3}{2} \left[32 \left(3 - \frac{2}{t+1} \right) + 3 \right] +$

$\frac{1}{2} t - \left[32 \left(3 - \frac{2}{t+1} \right) + 3 \right] - t$, 即 $y =$

$-\frac{32}{t+1} - \frac{1}{2} t + \frac{99}{2} (t \geq 0)$.

(2) 由 (1) 知 $y = -\frac{32}{t+1} - \frac{1}{2} t + \frac{99}{2}$

$(t \geq 0)$, 即 $y = -\frac{32}{t+1} - \frac{t+1}{2} + 50 =$

$-\left(\frac{32}{t+1} + \frac{t+1}{2} \right) + 50 (t \geq 0)$,

易知函数 $y = -\left(\frac{32}{t+1} + \frac{t+1}{2} \right) + 50$ 在

$(0, 7)$ 上单调递增, 在 $[7, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $y = -\left(\frac{32}{t+1} + \frac{t+1}{2}\right) + 50 \leq -\left(\frac{32}{8} + \frac{8}{2}\right) + 50 = 42$, 即 $t = 7$ 时, $y_{\max} = 42$.

所以该公司下一年促销费投入 7 万元时年利润最大, 最大利润为 42 万元.

9. 【解】(1) 由题意知, 当年生产量为 y 万件时, 总成本为 $8+64y+x=64 \times \frac{6x+2}{x+1} + 8+x$ (万元); 当销售量为 y

万件时, 年销售总收入为 $\frac{5}{4} \times 64 \times \frac{6x+2}{x+1} + \frac{1}{2}x$ (万元).

因此 $z = \left(\frac{5}{4} \times 64 \times \frac{6x+2}{x+1} + \frac{1}{2}x\right) + \left(2y + \frac{1}{2}\right) - \left(64 \times \frac{6x+2}{x+1} + 8+x\right)$, 即 $z = -\frac{72}{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{201}{2}$ ($x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}$).

(2) 由 (1) 得 $z = -\frac{72}{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{201}{2}$ ($x \geq 0, x \in \mathbf{Z}$), 因为 $x \geq 0$, 所以 $x+1 > 0$,

则 $z = -\frac{72}{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{201}{2} = -\frac{72}{x+1} -$

$\frac{1}{2}(x+1) + 101 = -\left[\frac{72}{x+1} + \frac{1}{2}(x+1)\right] + 101$, 由对勾函数的性质知,

函数 $z = -\left[\frac{72}{x+1} + \frac{1}{2}(x+1)\right] + 101$

在 $[0, 11]$ 上单调递增, 在 $(11, +\infty)$ 上单调递减, 所以 z 在 $x = 11$ 时取最大值, $z_{\max} = 89$. 故该厂家应投入 11 万元的广告宣传费用, 才能使该类产品的年度总利润最大, 最大年度总利润为 89 万元.

10. C 【解析】 设该户居民去年的用气量为 $x \text{ m}^3$, 缴纳的燃气费为 y 元, 则 $y =$

$$\begin{cases} 3.2x, 0 \leq x \leq 200, \\ 3.2 \times 200 + 3.8 \times (x-200), 200 < x \leq 300, \\ 3.2 \times 200 + 3.8 \times (300-200) + 4.8 \times (x-300), x > 300, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 3.2x, 0 \leq x \leq 200, \\ 3.8x-120, 200 < x \leq 300, \\ 4.8x-420, x > 300. \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq 200$ 时, 令 $3.2x = 868$, 解得 $x = 271.25$, 不合题意; 当 $200 < x \leq 300$ 时, 令 $3.8x - 120 = 868$, 解得 $x = 260$, 符合题意; 当 $x > 300$ 时, 令 $4.8x - 420 = 868$, 解得 $x = \frac{805}{3} < 300$, 不合题意. 综上, $x = 260$. 故 C 正确.

11. C 【解析】 由题图知, 甲厂费用为 $y_1 = \frac{1}{2}x + 1$ ($x \geq 0$), 乙厂费用为

$$y_2 = \begin{cases} \frac{3}{2}x, 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, x \geq 2, \end{cases} \quad \text{当 } 0 \leq x < 2$$

时, 令 $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}x$, 可得 $x = 1$; 当

$x \geq 2$ 时, 令 $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$, 可得 $x = 6$.

结合题图知, 当 $0 \leq x < 1$ 或 $x > 6$ 时乙厂划算; 当 $1 < x < 6$ 时甲厂划算; 当 $x = 1$ 或 6 时甲乙厂费用相同. 故 C 正确.

12. 【解】 (1) 依题意, 得 $f(x) = W(x) - (4x+4) =$

$$\begin{cases} 2x^2 + 10x - (4x+4), 0 < x \leq 5, \\ 200 - \frac{400}{x-1} - (4x+4), 5 < x \leq 12, \end{cases} \quad \text{整}$$

$$\text{理得} \begin{cases} 2x^2 + 6x - 4, 0 < x \leq 5, \\ 196 - 4x - \frac{400}{x-1}, 5 < x \leq 12. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x \leq 5$ 时, $f(x) = 2x^2 + 6x - 4$, 其图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -3$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, 5]$ 上为增函数, 所以当 $x = 5$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值 $2 \times 5^2 + 6 \times 5 - 4 = 76$;

当 $5 < x \leq 12$ 时, $f(x) = 192 - \left[4(x-1) + \frac{400}{x-1}\right] \leq 192 - 2 \times \sqrt{4(x-1) \times \frac{400}{x-1}} = 112$, 当且仅当 $4(x-1) = \frac{400}{x-1}$, 即 $x = 11$ 时取等号.

因为 $112 > 76$, 所以当 $x = 11$ 时, $f(x)$ 取得最大值 112.

13. A 【解析】 第二组数据近似为 $(9, 34)$, 第四组数据近似为 $(11, 34)$, 根据四组数据 $(8, 28)$, $(9, 34)$, $(10, 36)$, $(11, 34)$, 可得 $f(x)$ 先增后减, 而 $f(x) = bx + a$ 和 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + a$ 都是单调函数, 不符合要求, 所以选 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 由第二组数据 $(9, 34)$ 和第四组数据 $(11, 34)$, 可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 10$ 对称, 故当 $x = 12$ 时, $f(12) = f(8) = 28$. 故 A 正确.

14. 【解】 (1) 由已知得, $x^2 + 2xt = 200$, 所以 $t = \frac{200-x^2}{2x}$ ($0 < x \leq 6$).

(2) 由已知得, $y = 32x^2 + xt + 2t^2$, 所以 $y = 32x^2 + \frac{20\,000}{x^2} - 100$ ($0 < x \leq 6$).

(3) 由 (2) 知, $y = 32x^2 + \frac{20\,000}{x^2} - 100$ ($0 < x \leq 6$),

所以 $y = 32x^2 + \frac{20\,000}{x^2} - 100 \geq$

$$2\sqrt{32x^2 \cdot \frac{20\,000}{x^2}} - 100 = 1\,500,$$

当且仅当 $32x^2 = \frac{20\,000}{x^2}$, 即 $x = 5$

时, y 取最小值 $y_{\min} = 1\,500$.

故当 x 为 5 m 时, 休闲广场总造价 y 最小, 并且最小为 1 500 百元.

§2 考点训练

1. B 【解析】 根据图象可知, 治愈率

先减后增, B 选项符合; ACD 选项都是单调函数, 不符合. 故 B 正确.

2. D 【解析】由题意 $C(t)$, 从 0 到 4 逐渐增大, 从 4 到 8 不变, 从 8 到 12 逐渐增大, 从 12 到 20 不变, 从 20 到 24 又逐渐增大, 从 4 到 8 不变, 是常数, 该常数为 2, 只有 D 满足, 故 D 正确.

3. B 【解析】当质量比 $\frac{M}{m}$ 为 2 000 时, 最大速度 $v_1 = a \lg 2\,000$, 当质量比 $\frac{M}{m}$ 为 50 000 时, 最大速度 $v_2 = a \lg 50\,000$,
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{a \lg 50\,000}{a \lg 2\,000} = \frac{5 - \lg 2}{3 + \lg 2} \approx 1.42,$$
 $v_2 \approx 1.42v_1 = (1 + 42\%)v_1$, 所以若将质量比 $\frac{M}{m}$ 从 2 000 提升至 50 000, 则 v 大约增加了 42%. 故 B 正确.

4. A 【解析】由条件可得
$$\begin{cases} \ln p_0 - \ln p_1 = 5\,951.3k, \\ \ln p_0 - \ln p_2 = 4\,981.3k, \end{cases}$$
 两式相减可得 $\ln \frac{p_2}{p_1} = 970k$, 即 $\frac{p_2}{p_1} = e^{970k} = e^{970 \times 10^{-4}} = e^{0.097}$. 故 A 正确.

5. B 【解析】因为总成本 y 与生产量 x 之间的关系近似为 $y = \begin{cases} x^3 - 40x^2 + 500x, & x \in (0, 30], \\ \frac{1}{2}x^2 + 50x + 800, & x \in (30, +\infty), \end{cases}$ 所以设平均生产成本为 $f(x)$, 则 $f(x) = \frac{y}{x} = \begin{cases} x^2 - 40x + 500, & x \in (0, 30], \\ \frac{x}{2} + \frac{800}{x} + 50, & x \in (30, +\infty), \end{cases}$ 当 $x \in (0, 30]$ 时, $f(x) = x^2 - 40x + 500 = (x - 20)^2 + 100$, 则当 $x = 20$ 时, $f(x)$ 取得最小

值 100;

当 $x \in (30, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{x}{2} +$

$$\frac{800}{x} + 50 \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{800}{x}} + 50 = 90,$$

当且仅当 $\frac{x}{2} = \frac{800}{x}$, 即 $x = 40$ 时等

号成立, 此时 $f(x)$ 取得最小值为 90,

综上可得, 当 $x = 40$, 即生产量控制在 40 吨时, 每吨的平均生产成本最少. 故 B 正确.

6. C 【解析】由题意, 当 $0 \leq t < 1$ 时, 函数图象是一条线段, 由于过原点与点 $(1, 4)$, 故其解析式为 $y = 4t$, $0 \leq t < 1$; 当 $t \geq 1$ 时, 函数的解析式为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}$, 此时 $M(1, 4)$ 在曲线上, 将此点的坐标代入函数解析式得 $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}$, 解得 $a = 3$, 故函数的解析式为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}$, $t \geq 1$. 所以

$$y = f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}, & t \geq 1, \end{cases} \quad \text{令 } f(t) \geq 0.25, \text{ 即 } \begin{cases} 4t \geq 0.25, & 0 \leq t < 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3} \geq 0.25, & t \geq 1, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$\frac{1}{16} \leq t \leq 5$, 即服药一次治疗疾病有效的时间为 $5 - \frac{1}{16} = 4\frac{15}{16}$ 个小时. 故 C 正确.

7. 40 【解析】设某商场每天获得销售利润为 y (元), 则 $y = (x - 30)m = (x - 30)(100 - 2x) = -2(x - 40)^2 + 200$. 因为 $x > 30$, 所以当 $x = 40$ (元) 时, y 取得最大值为 200 (元). 所以若要每天获得最大的销售利润, 则每件商品的售价应定为 40 元.

8. 【解】(1) 若选 $y = px^2 + q$,

将 $x = 2, y = 10$ 和 $x = 4, y = 50$ 代入

$$\text{可得 } \begin{cases} 4p + q = 10, \\ 16p + q = 50, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p = \frac{10}{3}, \\ q = -\frac{10}{3}, \end{cases}$$

故 $y = \frac{10}{3}x^2 - \frac{10}{3}$, 将 $x = 6$ 代入 $y =$

$$\frac{10}{3}x^2 - \frac{10}{3}, y \neq 250, \text{ 不符合题意;}$$

若选 $y = ka^x (k > 0, a > 1)$,

将 $x = 2, y = 10$ 和 $x = 4, y = 50$ 代入

$$\text{可得 } \begin{cases} ka^2 = 10, \\ ka^4 = 50, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} k = 2, \\ a = \sqrt{5}, \end{cases}$$

故 $y = 2 \cdot (\sqrt{5})^x$, 将 $x = 6$ 代入 $y = 2(\sqrt{5})^x$ 可得 $y = 250$, 符合题意.

综上所述, 选择函数 $y = ka^x (k > 0, a > 1)$ 更合适, 解析式为 $y = 2(\sqrt{5})^x$.

(2) 设至少需要 x 个单位时间,

则 $2(\sqrt{5})^x \geq 10\,000$, 即 $(\sqrt{5})^x \geq 5\,000$, 两边同时取对数可得, $x \lg \sqrt{5} \geq \lg 5 + 3$,

$$\text{则 } x \geq 2 + \frac{3}{\frac{1}{2} \lg 5} = 2 + \frac{3}{\frac{1}{2}(1 - \lg 2)} \approx$$

10.58, $\therefore x \in \mathbf{N}^*$, $\therefore x$ 的最小值为 11, 故至少经过 11 个单位时间该病毒的数量不少于 1 亿个.

9. 【解】(1) 由于新能源汽车保有量每年增长得越来越快, 因此应该选择指数模型, 应选函数模型是 $y = a \cdot b^x (a > 0, b > 0 \text{ 且 } b \neq 1)$. 由题意

$$\text{得 } \begin{cases} a \cdot b^0 = 1\,500, \\ a \cdot b^1 = 2\,250, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} a = 1\,500, \\ b = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } y = 1\,500 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

(2) 设从 2019 年底起经过 x 年后传统能源汽车保有量为 z 辆, 则 $z = 50\,000 \times (1-2\%)^x$.

若从 2019 年底起经过 x 年后新能源汽车的保有量将超过传统能源汽车, 则 $1\,500 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x > 50\,000 \times$

$$(1-2\%)^x, \text{ 即 } 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x > 100 \times (1-2\%)^x = 100 \times \left(\frac{98}{100}\right)^x = 100 \times \left(\frac{7^2 \times 2}{100}\right)^x, \text{ 两边取对数化简得 } \lg 3 + x(\lg 3 - \lg 2) > 2 + x(2\lg 7 + \lg 2 - 2),$$

解得 $x > \frac{2 - \lg 3}{2 + \lg 3 - 2\lg 2 - 2\lg 7} \approx 8.44$, 因为 $x \in \mathbf{N}_+$, 故从 2019 年底起经过 9 年后, 即 2028 年底新能源汽车的保有量将超过传统能源汽车.

第五章 综合检测

1. C 【解析】因为 $f(x) = \sqrt{x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 而 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x) = \sqrt{x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $f(2) = \sqrt{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \sqrt{2} - 2 < 0$, $f(3) = \sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \sqrt{3} - 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 的零点所在区间是 $(2, 3)$. 故 C 正确.

2. B 【解析】 $\because f(x) = \log_3 x + x - 3$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 而 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = x - 3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x) = \log_3 x + x - 3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\because f(1) = \log_3 1 + 1 - 3 = -2 < 0$, $f(2) = \log_3 2 + 2 - 3 = \log_3 2 - 1 < 0$, $f(3) = \log_3 3 + 3 - 3 = 1 > 0$, $f(4) = \log_3 4 + 4 - 3 = \log_3 4 + 1 > 0$, $f(5) = \log_3 5 + 5 - 3 = \log_3 5 + 2 > 0$, \therefore 函数 $f(x) = \log_3 x + x - 3$ 零点所在大致区间是 $(2, 3)$. 故 B 正确.

3. A 【解析】由题意, $\begin{cases} 144 = e^b, \\ 48 = e^{20k+b}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 144 = e^b, \\ \frac{1}{3} = e^{20k}, \end{cases}$ 所以当 $x = 40$ 时, $y = e^{40k+b} = (e^{20k})^2 \cdot e^b = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 144 = 16$. 故 A 正确.

4. C 【解析】当 $x \leq 0$ 时, 令 $x^3 + 8 = 0$, 解得 $x = -2$. 当 $x > 0$ 时, 令 $\log_4 x + x - 3 = 0$, 得 $\log_4 x = -x + 3$, 因为函数 $y = \log_4 x$ 与 $y = -x + 3$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有唯一公共点, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点, 故 $f(x)$ 的零点个数为 2. 故 C 正确.

5. A 【解析】根据题意可得, 当 $0 < x \leq 1$ 时 (如图 (1) 所示), $S_{\triangle APM} = \frac{1}{2} \times AP \times 1 = \frac{1}{2}x$; 当 $1 < x \leq 2$ 时 (如图 (2) 所示), $S_{\triangle APM} = S_{\text{梯形 } ABCM} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle PCM} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 1 - \frac{1}{2} \times (x-1) \times 1 - \frac{1}{2} \times (2-x) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$;

当 $2 < x \leq \frac{5}{2}$ 时 (如图 (3) 所示),

$$S_{\triangle APM} = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{5}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$$

$$\therefore y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 1, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, & 1 < x \leq 2, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}, & 2 < x \leq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

析式, 结合图象, 故 A 正确.

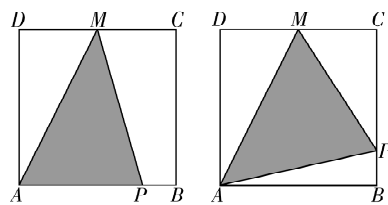


图 (1)

图 (2)

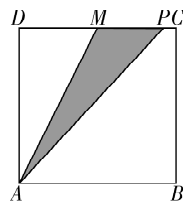


图 (3)

6. A 【解析】由题意可知

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 200, \\ kx + m, & 20 < x < 200 (k \neq 0), \\ 90, & 0 < x \leq 20, \end{cases}$$

则当 $x = 200$ 时, $v(200) = 0$; 当 $x = 20$ 时, $v(20) = 90$, 即

$$\begin{cases} 200k + m = 0, \\ 20k + m = 90, \end{cases} \text{ 解得 } k = -\frac{1}{2}, m = 100.$$

故 $f(x) = x \cdot v(x) =$

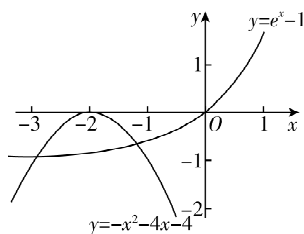
$$\begin{cases} 0, & x \geq 200, \\ \left(-\frac{1}{2}x + 100\right)x, & 20 < x < 200, \\ 90x, & 0 < x \leq 20. \end{cases}$$

当 $0 < x \leq 20$ 时, $f(x)$ 单调递增, 最大值在 $x = 20$ 处取到, 且 $f(20) = 1\,800$;

当 $20 < x < 200$ 时, $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 100\right)x = -\frac{1}{2}x^2 + 100x$, 图象的开口向下, 对称轴方程为 $x =$

100, $f(x)$ 的最大值在 $x_0 = 100$ 处取到, $f(100) = 5\,000$. 故 A 正确.

7. C 【解析】作出函数 $y = e^x - 1$ 和 $y = -x^2 - 4x - 4$ 的图象如图①所示, 当 $m > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 只有 1 个零点,



图①

当 $-2 < m \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有 2 个零点, 当 $m \leq -2$ 时, 函数 $f(x)$ 只有 1 个零点, 故 A 错误;

当 $\forall x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2) \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 成立时,

不妨设 $x_1 > x_2$, 可得 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 单调递增,

而当 $-2 < m \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 先增后减再增, 当 $m = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 不是增函数, 故 B 错误;

当 $m = 0$ 时, 令 $f(t) = 0$ 得 $t_1 = -2$, $t_2 = 0$,

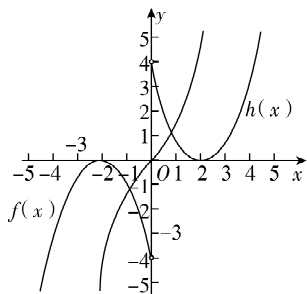
当 $f(x) = t_1 = -2$ 时, 由图①可知方程有两个解, 当 $f(x) = t_2 = 0$ 时, 由图①可得方程有两个解, 所以方程 $f(f(x)) = 0$ 有 4 个不同的实数根, 故 C 正确;

当 $m = 0$ 时, 方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 的根为 $f(x) = -f(-x)$ 的根, 令 $h(x) = -f(-x)$,

作出 $f(x)$, $h(x)$ 的图象如图②所示, 可得函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 有三个交点,

其中包括 $x = 0$, 即方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 有三个不同的实数根,

故 D 错误.



图②

8. A 【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为 $(0, +\infty)$ 的单调函数, 且对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(f(x) - \log_2 x) = 3$, 故可设存在唯一的实数 $C \in (0, +\infty)$, 使得 $f(C) = 3$, 则设 $f(x) - \log_2 x = C$, 所以 $f(x) = \log_2 x + C$, 所以 $f(C) = \log_2 C + C = 3$, 则 $\log_2 C = 3 - C$. 由于函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $y = 3 - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又因为 $\log_2 2 = 1 = 3 - 2$, 所以 $C = 2$, 故 $f(x) = \log_2 x + 2 = \log_2(4x)$. 再令 $2^{f(x)} - \frac{1}{x} = 0, x \in (0, +\infty)$, 得 $4x - \frac{1}{x} = 0$, 解得 $x = \pm \frac{1}{2}$ (负值舍去).

则函数 $y = 2^{f(x)} - \frac{1}{x}$ 的零点为 $\frac{1}{2}$. 故

A 正确.

9. BCD 【解析】 \because 函数 $y = \ln x, y = e^x, y = x - 2$ 均为增函数, $\therefore f(x) = e^x + x - 2, g(x) = \ln x + x - 2$ 均为增函数.

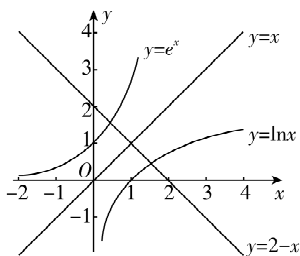
又 $\because f(0) = e^0 + 0 - 2 = -1 < 0, f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$, 且 $f(a) = 0$, $\therefore 0 < a < 1$. 又 $\because g(1) = \ln 1 + 1 - 2 = -1 < 0, g(2) = \ln 2 + 2 - 2 = \ln 2 > 0$, 且 $g(b) = 0, \therefore 1 < b < 2, \therefore 0 < a < 1 < b < 2$, 故 A 错误, B 正确;

$\because a < b, \therefore g(a) < g(b) = 0, 0 = f(a) < f(b)$, 即 $f(b) > 0$,

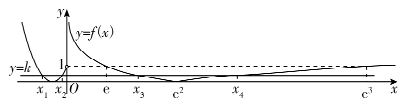
$\therefore g(a) < 0 < f(b)$, 故 C 正确;

令 $f(x) = e^x + x - 2 = 0, g(x) = \ln x + x - 2 = 0$ 得 $e^x = 2 - x, \ln x = 2 - x$, 作出函数 $y = e^x, y = x, y = \ln x$ 和 $y = 2 - x$ 的图象, 如图所示, \because 函数 $y = e^x, y = \ln x$ 的图象都和 $y = 2 - x$ 的图象相交, 且 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 又 $\because y = 2 - x$ 和 $y = x$ 图象的交点为 $(1, 1)$,

$\therefore \frac{a+b}{2} = 1$, 即 $a+b=2$, 故 D 正确.



10. ACD 【解析】当 $x < 0$ 时, 函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 值域为 $(0, +\infty)$, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 值域为 $(0, 1)$; 当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) = |\ln x - 2|$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递减, 值域为 $(0, +\infty)$, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 $(0, +\infty)$, 作出函数 $y = f(x)$ 的部分图象, 如图所示.



方程 $f(x) = k$ 有四个不同的实数根, 等价于函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有 4 个公共点, 观察图象知, 当 $0 < k < 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有 4 个公共点, 即方程 $f(x) = k$ 有四个不同的实数根, 故 A 正确;

因为二次函数 $y = x^2 + 2x + 1$ 图象对称轴为直线 $x = -1$, 因此 $x_1 + x_2 = -2$, 故 B 错误;

当 $x \in (0, e^2)$ 时, $f(x) = 2 - \ln x$, 由 $f(x) = 2 - \ln x = k, 0 < k < 1$, 得 $e <$

$x < e^2$, 因此 $e < x_3 < e^2$, 故 C 正确;

当 $x > 0$ 时, $e < x_3 < e^2 < x_4$, 由 $f(x_3) = f(x_4) = k$, 得 $2 - \ln x_3 = \ln x_4 - 2$, 解得 $x_3 x_4 = e^4$,

$x_1 < -1 < x_2 < 0$ 且 $x_1 + x_2 = -2$, 则

$x_1 x_2 = (-2 - x_2) x_2 = -(x_2 + 1)^2 + 1$,

则有 $0 < x_1 x_2 < 1$, 所以 $0 < x_1 x_2 x_3 x_4 < e^4$, 故 D 正确.

11. ACD 【解析】由题意可知

$L_{p_1} \in [60, 90]$, $L_{p_2} \in [50, 60]$,

$L_{p_3} = 40$, 且 $L_{p_1} - L_{p_2} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} -$

$20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2}$, 因为 $L_{p_1} \geq$

L_{p_2} , 则 $L_{p_1} - L_{p_2} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0$, 即

$\lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0$, 所以 $\frac{p_1}{p_2} \geq 1$ 且 $p_1, p_2 > 0$,

可得 $p_1 \geq p_2$, 故 A 正确;

同理, $L_{p_2} - L_{p_3} = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} - 20 \times$

$\lg \frac{p_3}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_3}$, 因为 $L_{p_2} - L_{p_3} =$

$L_{p_2} - 40 \geq 10$, 则 $20 \times \lg \frac{p_2}{p_3} \geq 10$, 即

$\lg \frac{p_2}{p_3} \geq \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{p_2}{p_3} \geq \sqrt{10}$ 且 $p_2,$

$p_3 > 0$, 可得 $p_2 \geq \sqrt{10} p_3$, 当且仅当 $L_{p_2} = 50$ 时等号成立, 故 B 错误;

因为 $L_{p_3} = 20 \times \lg \frac{p_3}{p_0} = 40$, 即

$\lg \frac{p_3}{p_0} = 2$, 可得 $\frac{p_3}{p_0} = 100$, 所以 $p_3 =$

$100 p_0$, 故 C 正确;

由 A 可知, $L_{p_1} - L_{p_2} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2}$, 且

$L_{p_1} - L_{p_2} \leq 90 - 50 = 40$, 则 $20 \times$

$\lg \frac{p_1}{p_2} \leq 40$, 即 $\lg \frac{p_1}{p_2} \leq 2$, 可得 $\frac{p_1}{p_2} \leq$

100 , 且 $p_1, p_2 > 0$, 所以 $p_1 \leq$

$100 p_2$, 故 D 正确.

12. 13 【解析】令 $t = f(x)$, 由 $f(t) = 0$

得 $\begin{cases} t \leq 2, \\ t = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t > 2, \\ \log_2(t-2) = 0, \end{cases}$ 所以

$t = 0$ 或 $t = 3$.

当 $t = f(x) = 0$ 时, $x = 0$ 或 $x = 3$; 当

$t = f(x) = 3$ 时, 则 $\begin{cases} x \leq 2, \\ x = 3 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x > 2, \\ \log_2(x-2) = 3, \end{cases}$ 解得 $x = 10$. 所以

函数 $y = f(f(x))$ 的所有零点之和为 $0 + 3 + 10 = 13$.

13. 1 610 【解析】设顾客选购物

品的总金额为 x 元, 获得的折扣

优惠金额为 y 元, 则当 $x \in (0,$

$1\ 000]$ 时, $y = 0$; 当 $x \in (1\ 000,$

$1\ 500]$ 时, $y = (x - 1\ 000) \times 5\% =$

$0.05x - 50$, 令 $y = 40$, 则 $0.05x -$

$50 = 40$, 解得 $x = 1\ 800 > 1\ 500$, 不

符合题意; 当 $x \in (1\ 500, +\infty)$

时, $y = 500 \times 0.05 + (x - 1\ 500) \times$

$0.1 = 25 + 0.1x - 150 = 0.1x - 125$,

令 $y = 40$, 所以 $0.1x - 125 = 40$, 解

得 $x = 1\ 650$, 符合题意. 所以他实

际所付金额为 $1\ 650 - 40 =$

$1\ 610$ 元.

14. $-\frac{16}{3}$ 【解析】因为 $f(x+2a) =$

$\sqrt{|x+2a-2a|} + \sqrt{|x+2a|} =$

$\sqrt{|-x-2a|} + \sqrt{|-x|} = f(-x)$, 所以

$f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称, 所以方

程 $f(x) = b$ 的根应成对出现, 又

因为关于 x 的方程 $f(x) = b$ 恰有

三个不同的实数根 x_1, x_2, x_3 且

$x_1 < x_2 < x_3 = b$, 所以该方程的一个

根是 a , 得 $x_1 = 2a - b, x_2 = a, x_3 = b$,

且 $a \neq b$,

所以 $\begin{cases} f(a) = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} = b, \\ f(b) = \sqrt{|b-2a|} + \sqrt{b} = b, \end{cases}$

由 $f(a) = 2\sqrt{a} = b$ 得 $a = \frac{b^2}{4}$,

(1) 当 $b - 2a \geq 0$, 即 $b - 2 \times \frac{b^2}{4} \geq 0$,

即 $0 < b \leq 2$ 时, $f(b) = \sqrt{b-2a} +$

$\sqrt{b} = b$, ①

则 $\sqrt{b-2a} - \sqrt{b} = \frac{-2a}{\sqrt{b-2a} + \sqrt{b}} =$

$\frac{-2 \times \frac{b^2}{4}}{b} = -\frac{b}{2}$, ②

由 ① - ② 得 $2\sqrt{b} = \frac{3}{2}b$, 解得 $b =$

$\frac{16}{9}$, 所以 $a = \frac{64}{81}$;

(2) 当 $b - 2a < 0$, 即 $b > 2$ 时, $f(b) =$

$\sqrt{2a-b} + \sqrt{b} = b$, ③

$\sqrt{2a-b} - \sqrt{b} = \frac{2a-2b}{\sqrt{2a-b} + \sqrt{b}} =$

$\frac{2 \times \frac{b^2}{4} - 2b}{b} = \frac{b}{2} - 2$, ④

由 ③ - ④ 得 $2\sqrt{b} = \frac{b}{2} + 2$, 即

$(\sqrt{b} - 2)^2 = 0$,

解得 $b = 4$, 此时 $a = \frac{b^2}{4} = 4 = b$, 不

合题意, 舍去.

综上, $a = \frac{64}{81}, b = \frac{16}{9}$, 所以 $b - 9a =$

$\frac{16}{9} - 9 \times \frac{64}{81} = -\frac{16}{3}$.

15. 【解】(1) 当 $x < 0$ 时, 令 $f(x) = 1 +$

$2x = 0$, 可得 $x = -\frac{1}{2}$;

当 $x = 0$ 时, 可得 $f(x) = f(0) = 2 \neq 0$, 不符合题意;

当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = 4 - x^2 = 0$, 可得 $x = 2$ 或 $x = -2$ (舍去).

综上可得, 函数 $f(x)$ 的零点为

$-\frac{1}{2}, 2$.

(2) 当 $-4 \leq x < 0$ 时, $f(x) = 1 + 2x$,

可得 $-7 \leq 1+2x < 1$, 即 $-7 \leq f(x) < 1$;

当 $x=0$ 时, $f(x)=f(0)=2$;

当 $0 < x < 3$ 时, $f(x)=4-x^2$, 可得 $-5 < 4-x^2 < 4$, 即 $-5 < f(x) < 4$.

综上可得, 当 $-4 \leq x < 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-7, 4)$.

16. 【解】(1) 由条件可得, 指数衰减

的模型为 $L(n) = \frac{1}{2}D^{\frac{n}{18}}$,

当 $n=18$ 时, $L(n) = \frac{2}{5}$, 代入可得

$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}D^{\frac{18}{18}}$, 解得 $D = \frac{4}{5}$, 所以该学

习率模型的表达式 $L(n) =$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{18}}.$$

(2) 要使学习率衰减到 $\frac{1}{5}$ 以下

(不含 $\frac{1}{5}$), 则 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{18}} < \frac{1}{5}$, 即

$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{18}} < \frac{2}{5}$, 所以 $\frac{n}{18} > \log_{\frac{4}{5}} \frac{2}{5}$, 即 $n >$

$$18 \log_{\frac{4}{5}} \frac{2}{5}, 18 \log_{\frac{4}{5}} \frac{2}{5} = 18 \times \frac{\lg \frac{2}{5}}{\lg \frac{4}{5}} =$$

$$18 \times \frac{\lg 2 - \lg 5}{2 \lg 2 - \lg 5} = 18 \times$$

$$\frac{\lg 2 - (1 - \lg 2)}{2 \lg 2 - (1 - \lg 2)} = 18 \times \frac{2 \lg 2 - 1}{3 \lg 2 - 1} \approx$$

73.9, 所以 $n > 73.9$, 则 $n = 74$, 即至少需训练迭代 74 轮.

17. 【解】(1) $\because f(-1) = 0, \therefore a - m + m - 1 = 0$, 即 $a = 1. \therefore f(x) = x^2 + mx + m - 1, \Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2$.

当 $m = 2$ 时, $\Delta = 0$, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

当 $m \neq 2$ 时, $\Delta > 0$, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

(2) 已知 $a \neq 0$, 则 $\Delta_1 = m^2 - 4a \cdot (m - 1) > 0$ 对于 $m \in \mathbf{R}$ 恒成立, 即 $m^2 - 4am + 4a > 0$ 恒成立, $\therefore \Delta' =$

$16a^2 - 16a < 0$, 解得 $0 < a < 1$, 即实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

(3) 证明: 设 $g(x) = f(x) -$

$$\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)],$$

$$\text{则 } g(x_1) = f(x_1) - \frac{1}{2}[f(x_1) +$$

$$f(x_2)] = \frac{1}{2}[f(x_1) - f(x_2)],$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \frac{1}{2}[f(x_1) +$$

$$f(x_2)] = \frac{1}{2}[f(x_2) - f(x_1)].$$

$$\because f(x_1) \neq f(x_2), \therefore g(x_1) \cdot$$

$$g(x_2) = -\frac{1}{4}[f(x_1) - f(x_2)]^2 < 0,$$

$\therefore g(x) = 0$ 在区间 (x_1, x_2) 上有实数根, 即方程 $f(x) = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ 在区间 (x_1, x_2) 上有实数根.

18. 【解】(1) 该项目的门票收入为 $50x$ 万元, 财政补贴收入 $10x$ 万元, 共 $60x$ 万元收入,

则利润 $W(x) =$

$$\begin{cases} 60x - 200 - 30, & 0 < x \leq 5, \\ 60x - 200 - (x^2 + 30x - 100), & 5 < x \leq 20, \\ 60x - 200 - \left(61x + \frac{900}{x} - 560\right), & x > 20, \end{cases}$$

化简得 $W(x) =$

$$\begin{cases} 60x - 230, & 0 < x \leq 5, \\ -x^2 + 30x - 100, & 5 < x \leq 20, \\ -x - \frac{900}{x} + 360, & x > 20. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x \leq 5$ 时, 此时 $W(x)$ 单调递增, $W(x)_{\max} = W(5) = 70$;

当 $5 < x \leq 20$ 时, 二次函数开口向下,

对称轴为直线 $x = -\frac{30}{2 \times (-1)} = 15$,

则 $W(x)_{\max} = W(15) = 125$;

当 $x > 20$ 时, 因为 $x + \frac{900}{x} \geq 60$, 当

且仅当 $x = \frac{900}{x}$, 即 $x = 30$ 时等号

成立, 所以 $W(x)_{\max} = W(30) =$

$$-30 - \frac{900}{30} + 360 = 300.$$

综上, 游客人数为 30 万时利润最大, 最大利润为 300 万元.

19. 【解】(1) $\because f(x) = 2x^2 - 8x + m + 3$

为二次函数, 图象开口向上, 对称轴为直线 $x = 2$, \therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减. $\because f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上存在零点,

$$\therefore \begin{cases} f(-1) \geq 0, \\ f(1) \leq 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2+8+m+3 \geq 0, \\ 2-8+m+3 \leq 0, \end{cases}$$

解得 $-13 \leq m \leq 3$, \therefore 实数 m 的取值范围是 $[-13, 3]$.

(2) 当 $m = -4$ 时, $f(x) = 2x^2 - 8x - 1$ 为二次函数, 开口向上, 对称轴为直线 $x = 2$, $\therefore f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减, $\because f(-1) = 9, f(1) = -7$, 则 $f(-1) \cdot f(1) < 0$, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上存在唯一零点 x_0 . 又 $\because f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的连续函数, 且 $f(0) = -1 < 0$,

$\therefore f(-1) \cdot f(0) < 0, \therefore x_0 \in (-1, 0)$. $\because f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} > 0$,

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(0) < 0, \therefore x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. $\because f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8} > 0$,

$\therefore f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f(0) < 0, \therefore x_0 \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. $\because f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{32} > 0$,

$\therefore f\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot f(0) < 0, \therefore x_0 \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right)$. 此时误差为

$$\left| -\frac{1}{8} - 0 \right| = \frac{1}{8} < 0.1, \text{ 即满足误差}$$

不超过 0.1, \therefore 零点所在的区间为 $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$.